

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

C. PARENTI

OPERATORI IPERBOLICI A CARATTERISTICHE DOPPIE

14 MARZO 1985

1. INTRODUZIONE

In questo seminario ci occuperemo di equazioni lineari iperboliche a caratteristiche di molteplicità ≤ 2 e non costante, con riferimento a due ordini di problemi:

- 1) Problema di Cauchy ben posto (caso C^∞ , Gevrey, analitico).
- 2) Analisi delle singularità (C^∞ , Gevrey, analitiche) delle soluzioni.

Tutti i risultati che esporremo sono noti, sicché il nostro intento è esclusivamente didattico.

E' noto che i due problemi su indicati sono strettamente correlati, ma va tenuto presente che il problema 2) ha un interesse indipendente da 1).

I problemi 1) e 2) hanno ormai trovato una sistemazione definitiva nel caso delle equazioni strettamente iperboliche. Il caso degli operatori iperboliche a caratteristiche di molteplicità costante (anche > 2) è stato pure ampiamente studiato (Cfr. Chazarain [1] per il caso C^∞ , Kashiwara-Kawai [6], Trepreau [23], Laubin [14] per il caso analitico-Gevrey e, per quanto riguarda 2), il recente lavoro di Taniguchi [21] nel caso Gevrey).

Per operatori a caratteristiche di molteplicità variabile il quadro dei risultati è invece assai più incompleto (specialmente per il problema 2)), benché la letteratura sull'argomento sia ormai molto vasta.

Qui ci limitiamo a considerare il caso di caratteristiche al più doppie e per quanto attiene a 2), tratteremo il caso più semplice: quello delle *caratteristiche doppie involutive*.

Per quanto riguarda il Problema di Cauchy (P. di C.) ben posto, tra i lavori fondamentali citiamo i seguenti:

i) Nel caso C^∞ . (Il P.d.C. è in generale non ben posto):

- Ivrii-Petkov [11]: condizioni necessarie
- Hormander [4]: precisazione di [11] e condizioni sufficienti (si veda anche Ivrii [10] e Oleinik [20]).

ii) Nel caso analitico e Gevrey

- Ivrii [9]: condizioni necessarie (in Gevrey d'ordine > 1 e per molteplicità ≥ 2)
- Trepreau [23](e bibliografia), Bronshtein [25], Kashiwara-Kawai [6]; condizioni sufficienti.

Circa il problema 2), ricordiamo:

i) Nel caso C^∞ (mancano risultati altrettanto generali che per 1)):

- Melrose [16]: caso effettivamente iperbolico (si confronti anche Alinhac [1]'), Ivrii [8]: caratteristiche doppie regolari (i.e. radici C^∞) di tipo simplettico).
- Melrose-Uhlmann [17], R. Lascar [12], Nosmas [19]: caratteristiche doppie regolari di tipo involutivo.
- R. Lascar [12], Melrose-Uhlmann [18]: caratteristiche doppie di tipo involutivo
- B. Lascar-R. Lascar [13], Ivrii [8], Alinhac [2]': caratteristiche doppie di tipo non involutivo.

ii) Nel caso analitico-Gevrey

- Il lavoro fondamentale di Kashiwara-Kawai [6] (Cfr. Laubin [14] per il caso di caratteristiche doppie di tipo involutivo).
- Miwa [6]': caratteristiche doppie regolari (i.e. radici analitiche) di tipo simplettico.
- Wakabayashi [24]: sul WF(-) Gevrey per operatori iperbolici qualunque.

2. OPERATORI IPERBOLICI

Poiché ci limiteremo a considerare caratteristiche di molteplicità ≤ 2 , non sarà troppo restrittivo limitarsi a trattare operatori differenziali del 2° ordine:

$$(2.1) \quad P = D_t^2 + 2 B(t, y, D_y) D_t - A(t, y, D_y),$$

su un cilindro aperto $X =]-T, T[\times Y \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y^n$, intorno dell'origine. Indicheremo con (x, ξ) , $x = (t, y)$, $\xi = (\tau, \eta)$ i punti di T^*X e con (y, η) i punti di T^*Y .

In (2.1) B (risp. A) è un operatore differenziale del 1° ordine (risp. 2° ordine) in coefficienti almeno C^∞ in X .

D'ora innanzi supporremo sempre soddisfatta l'ipotesi seguente:

H_1 - Detti $b(t, y, \eta)$ e $a(t, y, \eta)$ i simboli principali di B ed A rispettivamente, per ogni $(t, y, \eta) \in X \times \mathbb{R}_\eta^n \setminus 0$, l'equazione in τ :

$$(2.2) \quad p(t, x, \tau, \eta) = \tau^2 + 2b(t, y, \eta)\tau - a(t, y, \eta) = 0$$

ha radici reali.

H_1 equivale a dire che b ed a sono reali e che $b(t, y, \eta)^2 + a(t, y, \eta) \geq 0$, $|t| < T$, $(y, \eta) \in T^*Y \setminus 0$.

Il teorema di Lax-Mizohata (Cfr. Hörmander [4]) ci dice che la ipotesi H_1 è necessaria (almeno per $t = 0$) se si vuole che il Problema di Cauchy (omogeneo):

$$(2.3) \text{ P.d.C. } \begin{cases} Pu = 0 & \text{in } X \\ u|_{t=0} = g_0 \\ D_t u|_{t=0} = g_1 & \text{in } Y \end{cases}$$

sia ben posto per i dati $g_0, g_1 \in C_0^\infty(Y)$.

E' noto che senza minore generalità, ci si può limitare a considerare il caso $B = 0$. Infatti:

$$\begin{aligned} P &= (D_t + B)^2 - B^2 - A - [D_t, B] = \\ &= (D_t + B)^2 - C(t, y, D_y), \end{aligned}$$

con C del 2° ordine.

Se $B(t, y, D_y) = b(t, y, D_y) + \beta(t, y)$, esiste un diffeomorfismo χ di un intorno cilindrico di $t = 0, z = 0$ in $R_t \times R_z^n$ su un intorno di $(0, 0)$ in X per cui nelle variabili (t, z) $D_t + b(t, y, D_y)$ diviene D_t , sicché P si trasforma nell'operatore:

$$(2.3)' \quad \tilde{P} = (D_t + \tilde{\beta}(t, z))^2 - \tilde{C}(t, z, D_z),$$

con $\tilde{\beta}(t, z) = \beta(\chi(t, z))$ e \tilde{C} è del 2° ordine. Si noti che \tilde{P} soddisfa H_1 :

Infine la trasformazione:

$$(2.3)'' \quad v(t, z) \longrightarrow v(t, z) e^{\int_0^t \tilde{\beta}(s, z) ds}$$

muta le soluzioni del P.d.C. per \tilde{P} nelle soluzioni del P.d.C. per un operatore del tipo $D_t^2 - \tilde{C}(t, z, D_z)$, con \tilde{C} del 2° ordine, soddisfacente H_1 .

D'ora innanzi supporremo quindi P nella forma (2.1) con $B = 0$. La situazione più semplice si ha quando le radici di (2.2) sono distinte, che è il caso *strettamente iperbolico*. In tal caso il P.d.C. è ben posto in C^∞ . Inoltre si ha la seguente descrizione delle singolarità.

Si ponga

$$(2.4) \quad \Sigma = \{(t, y, \tau, \eta) \in T^*X \mid \eta \neq 0, p(t, y, \tau, \eta) = 0\}$$

(nel caso iperbolico stretto Σ è l'unione disgiunta dei due coni $\tau = \pm \sqrt{a(t, y, \eta)}$). Sia poi $H_p = p'_t \partial_t + \langle \nabla_\eta p, \partial_x \rangle - p'_t \partial_\tau - \langle \nabla_y p, \partial_\eta \rangle$ il campo hamiltoniano di p (attualmente $H_p \neq 0$ su $T^*X \setminus 0$).

Con $R \ni s \rightarrow \exp(s H_p)(\rho)$ indichiamo la curva integrale di H_p di punto iniziale $\rho \in T^*X \setminus 0$. Infine poniamo

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccc} i^*: T^*X|_Y & \longrightarrow & T^*Y \\ (0, y, \tau, \eta) & \longrightarrow & (y, \eta) \end{array}$$

Restano allora definite le relazioni seguenti:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^\pm = \{(\rho', \rho'') \in T^*X \setminus 0 \times T^*Y \setminus 0 \mid \exists \rho \in \Sigma, i^*(\rho) = \rho'', \\ \exists s, \pm s > 0, \rho' = \exp(s H_p)(\rho)\} \\ C = C^+ \cup C^- \end{array} \right.$$

Allora, nel caso strettamente iperbolico, se $u \in \mathcal{D}'(X)$ risolve (2.3) con $g_0, g_1 \in E'(Y)$ si ha:

$$(2.7) \quad WF(u) \subset C \text{ o } (WF(g_0) \cup WF(g_1)),$$

dove $WF(\cdot)$ è qui il wave front set C^∞ , analitico o Gevrey (Cfr. Hörmander [5] per le definizioni); per il caso del fronte d'onda analitico o Gevrey supponiamo i coefficienti di P analitici in X (anche se questa è un'ipotesi un po' sovrabbondante).

La situazione cambia radicalmente se P non è strettamente iperbolico, cioè se $a(t, y, \eta) = 0$ per qualche $t, y, \eta, \eta \neq 0$.

Mettiamoci dunque nella situazione in cui l'insieme:

$$(2.8) \quad \Sigma' = \{t, y, \tau, \eta \in T^*X \mid \eta \neq 0, dp(t, y, \tau, \eta) = 0\}$$

è non vuoto. Si noti che $\Sigma' \subset \Sigma$ (relazione d'Eulero). Inoltre, poiché ci interessa il P.d.C. (2.3) supporremo sempre che sia $i^*(\Sigma') \neq \emptyset$.

E' noto che se Σ' è non vuoto il P.d.C. (2.3) non è in generale ben posto in C^∞ . Precisamente, com'è stato provato da Ivrii-Petkov [11] e da Hörmander [4], i termini del 1° ordine in P giocano un ruolo determinante. Per poter enunciare il Teorema di Ivrii-Petkov ricordiamo alcune nozioni.

Detto p_1 il termine omogeneo di grado 1 nel simbolo di P , poniamo:

$$(2.9) \quad p'(x, \xi) = p_1(x, \xi) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, \xi)$$

Il simbolo p' si chiama *simbolo sottoprincipale* di P . E' possibile vede-

re che la restrizione $p'|_{\Sigma'}$ è invariante per trasformazioni canoniche omogenee (Cfr. Duistermaat [2]).

Per ogni $\rho \in \Sigma'$ si ponga

$$(2.10) \quad \text{Hess } p(\rho) = \begin{pmatrix} d_{xx}^2 p(\rho) & d_{\xi x}^2 p(\rho) \\ d_{x\xi}^2 p(\rho) & d_{\xi\xi}^2 p(\rho) \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana di p in ρ .

Accanto a questa consideriamo la *matrice fondamentale* definita da:

$$(2.11) \quad F(\rho) = \begin{pmatrix} d_{x\xi}^2 p(\rho) & d_{\xi\xi}^2 p(\rho) \\ -d_{xx}^2 p(\rho) & -d_{\xi x}^2 p(\rho) \end{pmatrix}$$

L'interpretazione di $F(\rho)$ è la seguente. La matrice Hess $p(\rho)$ definisce una forma bilineare su $T_\rho(T^*X)$; indicata con

$$(2.12) \quad \omega = \sum_{j=1}^{n+1} d\xi_j \wedge dx_j$$

la 2-forma *simplettica* su $T(T^*X)$, si ha

$$(2.12)' \quad \omega_\rho \left(\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta x' \\ \delta \xi' \end{pmatrix} \right) = \langle \delta \xi, \delta x' \rangle - \langle \delta \xi', \delta x \rangle,$$

per ogni $\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta x' \\ \delta \xi' \end{pmatrix} \in T_\rho(T^*X)$.

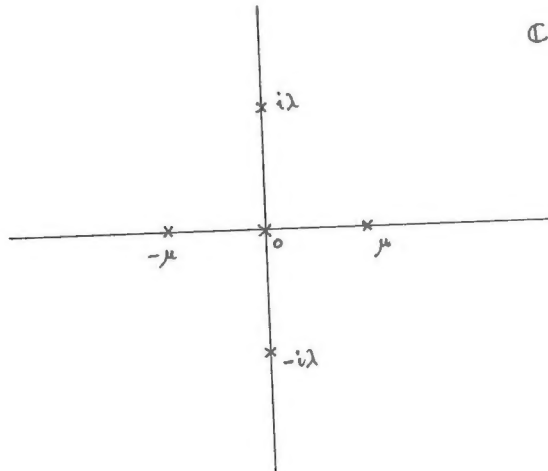
E' facile riconoscere che si ha:

$$(2.13) \quad \langle \text{Hess } p(\rho) v, v' \rangle = \omega_\rho(v, F(\rho)v'), \quad \forall v, v' \in T_\rho(T^*X)$$

La simmetria di Hess $p(\rho)$ fa sì che si abbia:

$$(2.13)' \quad \omega_\rho(v, F(\rho)v') + \omega_\rho(F(\rho)v, v') = 0 \quad \forall v, v' \in T_\rho(T^*X).$$

Giacché $F(\rho)$ è antisimmetrica rispetto ad ω_ρ , si può vedere (Cfr. Duijtermaat [2]) che lo spettro di $F(\rho)$ è contenuto in $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda = 0\}$ fatta al più eccezione per 2 autovalori reali $\mu, -\mu$ di molteplicità geometrica 1; di più gli autovalori immaginari e non nulli di $F(\rho)$ sono semplici, mentre 0 è un autovalore di molteplicità pari.



Si dice che P è *effettivamente iperbolico* in $\rho \in \Sigma^1$ se $F(\rho)$ possiede autovalori reali $\neq 0$.

(+) Poiché p è reale è facile vedere che $F(\rho) = \frac{d}{dt} [d_\rho \phi_t]_{t=0}$, dove

$\phi_t: T^*X \rightarrow T^*X$ è il gruppo locale $\phi_t(\rho) = \exp(tH_p)(\rho)$.

Esempi

$$1) P = D_t^2 - t^2 |D_y|^2 + \dots ;$$

è effettivamente iperbolico in ogni punto $\rho = (t = 0, y, \tau = 0, \eta)$ di
(con $\mu = \pm 2|\eta|$)

$$2) P = D_t^2 - \sum_{j=1}^k D_{y_j}^2 + \dots, k < n;$$

non è effettivamente iperbolico in ogni punto $\rho = (t, y; \tau = 0, \eta' = 0, \eta'' \neq 0)$
di Σ^1 ($F(\rho)$ è nilpotente).

$$3) P = D_t^2 - D_{y_1}^2 - y_1^2 \sum_{j=2}^n D_{y_j}^2 + \dots$$

non è effettivamente iperbolico in ogni punto $\rho = (t, y, \tau = 0, \eta_1 = 0, \eta')$ di Σ^1 ($F(\rho)$ ha autovalori 0 e $\pm 2i|\eta'|$).

Definiamo

$$(2.14) \quad \text{Tr}^+ F(\rho) = \sum_{\substack{\lambda \in \text{sp } F(\rho) \\ \text{Im } \lambda \geq 0}} \text{Im } \lambda$$

Possiamo allora enunciare il teorema seguente.

Teorema 1 (Ivrii-Petkov [11], Hörmander [4]).

Se $\Sigma^1 \neq \emptyset$ e se il P.d.C. (2.3) è ben posto in C^∞ allora per ogni $\rho \in \Sigma^1$ deve aversi:

1) P è effettivamente iperbolico in ρ
ovvero:

$$2) \quad -\frac{1}{2} \text{Tr}^+ F(\rho) \leq p'(\rho) \leq \frac{1}{2} \text{Tr}^+ F(\rho).$$

Si osservi che se $F(\rho)$ è nilpotente la condizione 2) diviene $p'(\rho) = 0$, *condizione di Levi*.

Per la (lunga) dimostrazione si rimanda a [4].

Quando alle condizioni sufficienti perché il P.d.C. sia ben posto in C^∞ occorre distinguere tra il caso effettivamente iperbolico ed il caso non effettivamente iperbolico.

Storicamente, il caso effettivamente iperbolico è stato il primo ad essere trattato diffusamente a cominciare dal lavoro fondamentale di Oleinik [20]. Una sistemazione pressoché definitiva si è però avuta solo recentemente con Melrose [16] (cfr. anche Ivrii [10]). In [16] viene provato "essenzialmente" che se P è effettivamente iperbolico in ogni punto $\rho \in \Sigma'$ allora il P.d.C. è ben posto in C^∞ . Viene anche dato un teorema di propagazione per il $WF(\cdot) - C^\infty$ che ora enunceremo. Premettiamo la definizione di *raggio* (o *bicaratteristica spezzata*). Diremo che $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ continua, con $I = [\alpha, \beta]$, è un raggio se esiste una partizione finita $s_0 = \alpha < s_1 < \dots < s_{v-1} < s_v = \beta$ di I per cui:

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(s_j) \in \Sigma' \quad , \quad j = 1, \dots, v-1 \\ t \text{ o } \gamma \text{ è monotona vicino a } s_0, s_1, \dots, s_v \\ \gamma|_{(s_{j-1}, s_j)} \quad j = 1, \dots, v \end{array} \right. \text{ è una bicaratteristica nulla di } P \text{ contenuta in } \Sigma \setminus \Sigma'$$

Si ha allora il risultato seguente:

Teorema 2 (Melrose [16]). Se P è effettivamente iperbolico in ogni punto di Σ' e se $u \in \mathcal{D}'(X)$ è soluzione del P.d.C. (2.3), allora:

$$(2.16) \quad \text{WF}(u) \subset \{\rho \in \Sigma \mid \exists \rho' \in (i^*)^{-1}(\text{WF}(g_0) \cup \text{WF}(g_1)), \exists \text{ un raggio } \gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \Sigma, \gamma(\alpha) = \rho', \gamma(\beta) = \rho\}.$$

Il $\text{WF}(\cdot)$ è qui il fronte d'onda C^∞ .

Un esempio geometricamente interessante si ha quando Σ' è una sottovarietà (C^∞) di $T^*\mathcal{X} \setminus 0$ di codimensione $k+1$, con $k = 2h + 1$, di tipo simplettico, i.e. la restrizione della 2-forma ω_ρ a $T_\rho(\Sigma')$ è non degenera $\forall \rho \in \Sigma'$ (alternativamente $T_\rho(\Sigma') \cap T_\rho(\Sigma')^\perp = \{0\}$, essendo \perp l'ortogonale per ω_ρ) e lo spettro di $F(\rho)$ è fatto da $\lambda = 0, \lambda = \pm\mu, \mu > 0$.

È allora possibile trovare due sottovarietà $\Lambda^+, \Lambda^- \subset \Sigma$ tali che $\Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Sigma'$ con intersezione trasversale (i.e. $\text{codim } \Lambda^+ = \text{codim } \Lambda^- = 2h+1$ e $T_\rho(\Sigma') = T_\rho(\Lambda^+) \cap T_\rho(\Lambda^-)$, $\forall \rho \in \Sigma'$)⁽⁺⁾.

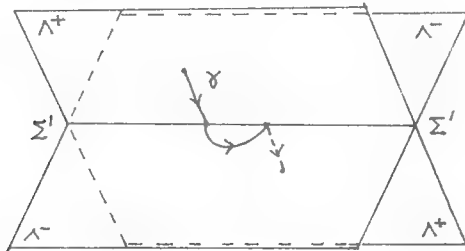
Ad es., sia $P = D_t^2 - (t^2 + |y'|^2)|D_{y''}|^2 + |D_{y'}|^2$, $y = (y', y'') \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{n-h}$; si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^\pm = \{(t, y, \tau, \eta) \mid y' = 0, \eta' = 0, \tau = \pm t|\eta''|, \eta'' \neq 0\} \\ \Sigma' = \Lambda^+ \cap \Lambda^- \\ \Sigma = \{(t, y, \tau, \eta) \mid \tau = \pm \sqrt{(t^2 + |y'|^2)|\eta'|^2 + |\eta''|^2}\} \end{array} \right.$$

È facile vedere che le bicaratteristiche nulle di P che intersecano Λ^+ o Λ^- sono contenute in Λ^+ (risp. Λ^-) ed hanno un punto limite in Σ' , mentre le bicaratteristiche nulle contenute in $\Sigma \setminus (\Lambda^+ \cup \Lambda^-)$ non hanno punti limite in Σ' .

⁽⁺⁾Cfr. R. Abraham-J. Marsden: Foundation of mechanics. Benjamin, 1978.

Il Teorema 2 applicato in questo caso dice in sostanza che il $WF(u)$ si propaga o su bicaratteristiche contenute in $\Sigma \setminus (\Lambda^+ \cup \Lambda^-)$ o su bicaratteristiche contenute in $\Lambda^+ \cup \Lambda^-$ con biforcazioni possibili lungo Σ' .



Nel caso particolare in cui $h = 0$ sono noti risultati, dipendenti da $p'|_{\Sigma'}$, di esistenza o non esistenza di biforcazioni lungo Σ' (Cfr. Ivrii [8] e Alinhac [1]'). Risultati per $h > 1$, in C^∞ , non ci sono noti.

Per alcune indicazioni su esempi fisici riconducibili ai modelli ora esaminati rinviamo a Taylor [22].

Per operatori modellati su $D_t^2 - t^2|D_x|^2 + \dots$ è stato ampiamente studiato il fenomeno di biforcazione o non biforcazione delle singolarità sulla varietà doppia $\Sigma' = \{t = \tau = 0\}$ (Cfr. Alinhac [1]'); questo fenomeno è legato al comportamento di $p'|_{\Sigma'}$. Non ci risulta che una analisi simile sia stata fatta per operatori effettivamente iperbolici qualunque.

Veniamo ora al caso non effettivamente iperbolico.

Qui i risultati più generali ci sembrano essere quelli di Hörmander [4]. Hörmander lavora sotto alcune ipotesi di regolarità per e di "stabilità" per lo spettro di $F(\rho)$.

H_2) L'insieme $\Sigma' \subset \Sigma \subset T^*X_0$ è una sottovarietà (C^∞) di codimensione $k+1$, $k \geq 1$, di T^*X_0 e, per ogni $\rho \in \Sigma'$, il rango della matrice hessiana $\text{Hess } p(\rho)$ è uguale a $k+1$.

L'ipotesi H_2 ha il seguente significato. Se $p(t, y, \tau, \eta) = \tau^2 - a(t, y, \eta)$, allora Σ' è definita da $\tau = 0$ e $a(t, y, \eta) = 0$ (perché $a \geq 0$ e quindi da $a = 0$ equivale ad $a = 0$). Dunque $a = 0$ definisce una sottovarietà $\hat{\Sigma}$ di T^*X_0 di codimensione k . Ora per ogni $\hat{\rho} \in \hat{\Sigma}$ indichiamo con $N_{\hat{\rho}}(\hat{\Sigma}) = T_{\hat{\rho}}(R_t \times T^*Y) / T_{\hat{\rho}}(\hat{\Sigma})$ lo spazio normale a $\hat{\Sigma}$ in $\hat{\rho}$ e con π la proiezione naturale su $N_{\hat{\rho}}(\hat{\Sigma})$; la matrice Hess $a(\hat{\rho})$ induce una forma quadratica su $N_{\hat{\rho}}(\hat{\Sigma})$:

$$(2.17) \quad \langle \text{Hess } a(\hat{\rho}) \pi(v), \pi(v) \rangle = \langle \text{Hess } a(\hat{\rho})v, v \rangle$$

Dire che $\text{Hess } p(\rho)$, $\rho = (\hat{\rho}, \tau = 0)$, ha rango $k+1$ equivale a dire che la forma (2.17) è non degenere, sicché, in conclusione, per ogni aperto conico $U \subset T^*X_0$, esiste $C_U > 0$ per cui si ha:

$$(2.18) \quad C_U^{-1} |\eta|^2 d_{\hat{\Sigma}}^2(t, y, \eta / |\eta|)^2 \leq a(t, y, \eta) \leq C_U |\eta|^2 d_{\hat{\Sigma}}^2(t, y, \eta / |\eta|)^2,$$

per ogni $(t, y, \eta) \in U$, essendo $d_{\hat{\Sigma}}$ la distanza da $\hat{\Sigma}$.

La (2.18) esprime che a è *trasversalmente ellittico* rispetto a $\hat{\Sigma}$. L'altra ipotesi cui accennavamo è la "stabilità" dello spettro di $F(\rho)$, per ρ in Σ' (o meglio in ogni componente di Σ'). Non preciseremo qui il significato esatto di stabilità dello spettro di $F(\rho)$, rinviando a [4], pag. 186, per la definizione precisa; osserviamo solo che tale ipotesi implica, in particolare, che il rango di $\omega|_{T\Sigma'}$ è costante (ricordiamo che per ogni $\rho \in \Sigma'$, il rango di $\omega_{\rho}|_{T_{\rho}\Sigma'}$ è uguale a $\dim T_{\rho}\Sigma' - \dim(T_{\rho}\Sigma' \cap (T_{\rho}\Sigma')^{\perp})$, dove \perp indica l'ortogonale per $\hat{\omega}_{\rho}$).

Possiamo ora enunciare il teorema seguente.

Teorema 3 (Hormander [4]). Supponiamo che Σ' soddisfi H_2 , che lo spettro di $F(\rho)$ sia stabile, che P non sia effettivamente iperbolico in Σ' e che esista un $\epsilon > 0$ tale che:

$$-\frac{1}{2}(1-\epsilon)T_r^+ F(\rho) \leq p'(\rho) \leq \frac{1}{2}(1-\epsilon) \text{Tr}^+ F(\rho) \quad , \quad \forall \rho \in \Sigma'.$$

Allora il P.d.C. (2.3) è ben posto in C^∞ .

Per la dimostrazione rinviamo a [4] e osserviamo che gli esempi 2.e 3.di pag.11 soddisfano le ipotesi del Teorema 3 (se i termini d'ordine inferiore sono scelti convenientemente).

Per risultati in quest'ordine di idee si veda anche Ivrii [10].

Se si passa a esaminare quali sono i risultati per quanto attiene al problema 2), ci si accorge che non disponiamo di teoremi di propagazione in C^∞ che valgano per tutti gli operatori trattati dal Teorema 3.

Ricordiamo qui i contributi importanti di Ivrii [7,8]; R. Lascar [12], B. e R. Lascar [13], Alinhac [1]', [2]'.
 Ci pare che l'unica situazione in cui si possieda una descrizione esauriente delle singolarità C^∞ è quando Σ' è *involutiva regolare*.

Ricordiamo che ciò significa due cose:

$$1. \quad \forall \rho \in \Sigma' \quad , \quad T_\rho(\Sigma')^\perp \subset T_\rho \Sigma'.$$

$$2. \quad \text{Il campo radiale } \theta = \langle \xi, \partial_\xi \rangle \notin T_\rho(\Sigma')^\perp, \quad \forall \rho \in \Sigma'.$$

Una maniera equivalente di esprimere le condizioni su indicate è la seguente: se $q_0(x, \xi) = q_1(x, \xi) = \dots = q_k(x, \xi) = 0$ sono equazio-

ni locali indipendenti per Σ' (con le q_j positivamente omogenee di grado 1 in ξ , $0 \leq j \leq k$), allora 1) e 2) equivalgono a:

$$1.' \quad \{q_i, q_j\}(\rho) = 0 \quad , \quad \forall \rho \in \Sigma', \forall i, j.$$

$$2.' \quad H_{q_0}(\rho), \dots, H_{q_k}(\rho), \sum_1^{n+1} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{sono indipendenti } \forall \rho \in \Sigma'.$$

Si noti che $T_\rho(\Sigma')$ è generato da $H_{q_0}(\rho), \dots, H_{q_k}(\rho)$ e che, necessariamente $k < n$.

Siccome vogliamo trattare un po' diffusamente il caso involutivo sarà opportuno fare l'osservazione seguente.

Poiché $i^*(\Sigma' |_{\mathcal{Y}}) \neq \emptyset$, preso un punto $\rho_0 = (t=0, y_0, \tau=0, \eta_0) \in \Sigma'$ un sistema di equazioni indipendenti per Σ' vicino a ρ_0 si otterrà prendendo $q_0 = \tau$ e $q_j = q_j(t, y, \eta)$, per $j = 1, \dots, k$. L'ipotesi 1.' dice che

$$(2.19) \quad \frac{\partial}{\partial t} q_j(t, y, \eta) = \{ \tau, q_j \} = \sum_{i=1}^k \alpha_{ji}(t, y, \eta) q_i(t, y, \eta), \quad j = 1, \dots, k,$$

per una certa matrice $k \times k$.

Segue da (2.19) che avremo:

$$\begin{pmatrix} q_1(t, y, \eta) \\ \vdots \\ q_k(t, y, \eta) \end{pmatrix} = C(t, y, \eta) \begin{pmatrix} q_1(0, y, \eta) \\ \vdots \\ q_k(0, y, \eta) \end{pmatrix}$$

per una certa matrice $k \times k$, invertibile, $C(t, y, \eta)$.

Ne consegue che $i^*(\Sigma' | \gamma) = \tilde{\Sigma} \subset T^*Y_0$ è una sottovarietà involutiva regolare, di codimensione k di T^*Y_0 e che

$$(2.21) \quad \Sigma' = \{(t, y, \tau, \eta) \in T^*X | \tau = 0, (y, \eta) \in \tilde{\Sigma}\}.$$

Preso $i^*(\rho_0)$, è noto (Cfr. Duistermaat [2]) che si può trovare un intorno conico $\Gamma \subset T^*Y_0$ di $i^*(\rho_0)$, un intorno conico $\Gamma' \subset T^*R_z^n \setminus 0 = T^*R_z^k \times T^*R_z^{n-k} \setminus 0$ di $\sigma_0 = (z = 0, \zeta_0)$, $\zeta_0 = (\zeta_0' = 0, \zeta_0'' = (0, \dots, 0, 1))$, ed una trasformazione canonica omogenea $\Phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ tale che: $\Phi(i^*(\rho_0)) = \sigma_0$ e $\Phi(\Gamma \cap \tilde{\Sigma}) = \{(z, \zeta) \in \Gamma' \mid \zeta' = (\zeta_1, \dots, \zeta_k) = 0\}$.

Per noti risultati (Cfr. Hormander [3]) possiamo trovare due operatori integrali di Fourier $E \in I^0(R_z^n, Y; \wedge')$, $E' \in I^0(Y, R_z^n; (\wedge^{-1})')$ (dove \wedge è un intorno conico chiuso di $(\sigma_0, i^*(\rho_0))$ nel grafico di Φ e \wedge^{-1} è la relazione inversa) tali che $E E' - \text{id}_{R_z^n}$ (risp. $E' E - \text{id}_Y$) è smoothing in un intorno conico di (σ_0, σ_0) (risp. di $(i^*(\rho_0), i^*(\rho_0))$). Posto allora $P = (E \otimes I_t) P(E' \otimes I_t)$, si trova:

$$(2.22) \quad \tilde{P}(t, z, D_t, D_z) = D_t^2 - \tilde{A}(t, z, D_z)$$

con $\tilde{A} \in OPS_{cl}^2(R_z^n)$, dipendente in modo C^∞ da t . Per il simbolo principale \tilde{a} di \tilde{A} si ha:

$$(2.23) \quad \tilde{a}(t, z, \zeta) = a(t, \Phi^{-1}(z, \zeta)),$$

almeno su un intorno di σ_0 .

Per l'ipotesi fatta su Hess $p(\rho_0)$, ne segue che, utilizzando la formula di Taylor potremo scrivere:

$$(2.24) \quad \tilde{a}(t, z, \zeta) = \sum_{i,j=1}^k \tilde{a}_{ij}(t, z, \zeta) \zeta_i \zeta_j,$$

per una certa matrice $(\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ a termini in $S_{C^1}^0(\mathbb{R}_2^n)$ con $(\tilde{a}_{ij}(0, z_0, \zeta_0)) > 0$.

Il discorso precedente ci dice che se siamo interessati allo studio delle singularità microlocali di soluzioni del P.d.C. (2.3) (anche non omogeneo) possiamo supporre, tornando alle vecchie notazioni, che P sia del tipo:

$$(2.25) \quad P = D_t^2 - \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(t,y,D_y) D_{y_i} D_{y_j} + A_1(t,y,D_y),$$

dove $A_{ij} \in OPS_{C^1}^0(Y)$ e $A_1 \in OPS_{C^1}^1(Y)$, dipendenti in modo C^∞ da t , e la matrice (simmetrica) $(a_{ij}(t,y,n))$ dei simboli principali degli A_{ij} è definita positiva su $]-T, T[\times T^*Y \setminus 0$.

Ciò che abbiamo provato è che ogni operatore iperbolico soddisfacente H_2 con Σ' involutiva regolare è microlocalmente (vicino a punti di $\Sigma' |_Y$) equivalente ad uno o.p.d. del tipo (2.25). Si noti che per (2.25) si ha:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \Sigma' &= \{(t,y,\tau,n = (n',n'')) \mid \tau = 0, n' = (n_1, \dots, n_k) = 0, n'' \neq 0\} \\ \Sigma &= \{(t,y,\tau,n) \in T^*X \mid n \neq 0, \tau = \pm \sqrt{\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(t,y,n) \eta_i \eta_j}\}. \end{aligned}$$

È importante notare che se $k = 1$ (e solo in tal caso) il polinomio $\tau \rightarrow p(t,\tau,y,n)$ è fattorizzabile nella forma $(\tau - \lambda_1(t,y,n))(\tau - \lambda_2(t,y,n))$ con radici $\lambda_j \in C^\infty$ reali, $j = 1, 2$. È questo il caso di caratteristiche doppie regolari, studiato, tra gli altri, da Melrose-Uhlmann [17] e da Nosmas [19] (quest'ultimo tratta anche casi, sempre involutivi, con caratteristiche regolari di molteplicità ≥ 2).

Vogliamo ora enunciare un risultato di propagazione dovuto a

Melrose-Uhlmann [18] (Cfr. anche R. Lascar [12]).

Per motivare un po' le astruserie che faremo si consideri l'esempio molto (molto) particolare in cui $P = \partial_t^2 - \Delta_{y'}$, è l'operatore delle onde in $R_t \times R_{y'}^k$, pensato però come operatore in $R_t \times R_{y'}^n$. La soluzione del problema di Cauchy $Pu(t; y', y'') = 0$, $u(0, y', y'') = 0$, $(\partial_t u)(0, y', y'') = f(y', y'')$ è data da $u = (E(t, y') \otimes I_{y''})f$, dove $E(t, y')$ è l'operatore che risolve lo stesso problema di Cauchy in $R_t \times R_{y'}^k$. Le singolarità (C^∞ , analitiche o Gevrey) sono facilmente calcolabili. Si ha:

$$WF'(E \otimes I_{y''}) \subset \{((t, y', y'', \tau, \eta', \eta''), (z', y'', \zeta', \eta'')) \in$$

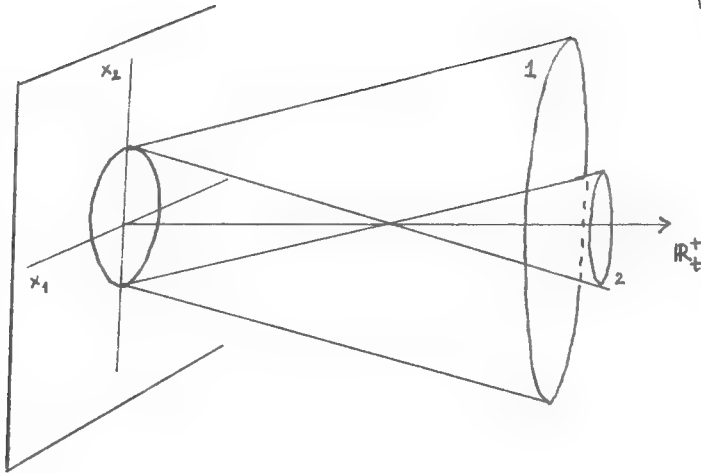
$$T^*(R_t \times R^n) \times T^*(R^n) \mid ((t, y', \tau, \eta'), (z', \zeta')) \in WF'(E)\} \cup$$

$$\cup \{((t, y', y''; 0, 0, \eta''), (z', y''; 0, \eta'')) \in T^*(R_t \times R^n) \times T^*(R^n)\}$$

$$(t, y', z') \in \text{supp } E \text{ (i.e. } |t| \geq |y' - z'|) \text{ e } (y'', \eta'') \in T^*(R^n) \setminus \{0\} = I \cup F.$$

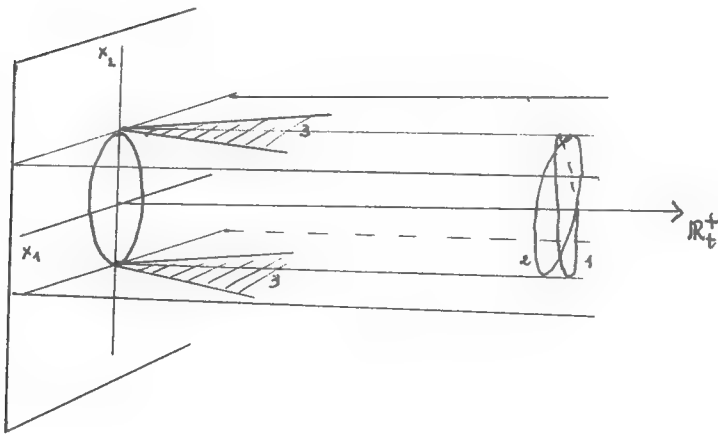
Si osservi che mentre I è contenuto in $(\Sigma \Sigma') \times T^*R^n$ (giacché $((t, y', \tau, \eta'), (z', \zeta')) \in WF'(E)$ significa $\zeta' = \eta' \neq 0$, $y' = z' \pm t \eta' / |\eta'|$) è dà ragione della propagazione fuori di Σ' , il secondo termine F dice che in ogni piano y'' fissato ha luogo propagazione nelle variabili (t, y') lungo il cono d'onda uscente da z' . Si è così in presenza del fenomeno di *rifrazione conica* (Cfr. Ludwig [15] per un'analisi fisica del fenomeno).

Per visualizzare cosa accade, nelle figure successive è mostrata l'evoluzione di una linea di discontinuità (una circonferenza) nel caso $n = 2$ e nei due casi $P = \partial_t^2 - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)$ (iperbolico stretto) e $P = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2$ (doppio)



$$P = \partial_t^2 - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)$$

singularità iniziale su $x_1 + x_2^2 = \text{cost} > 0$

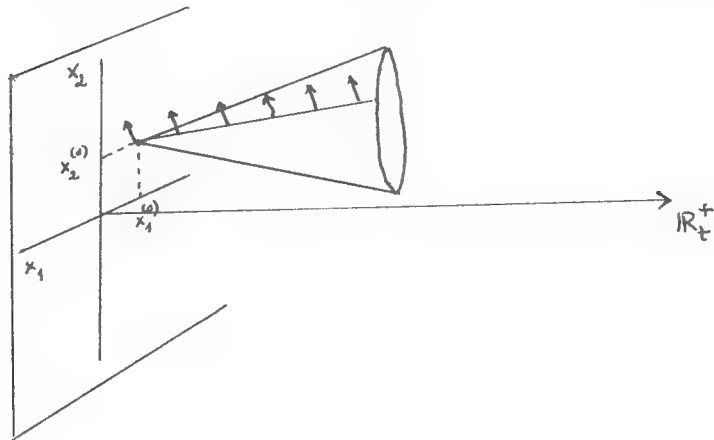


$$P = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2, \text{ in } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2$$

singularità iniziale su $x_1^2 + x_2^2 = \text{cost.}$

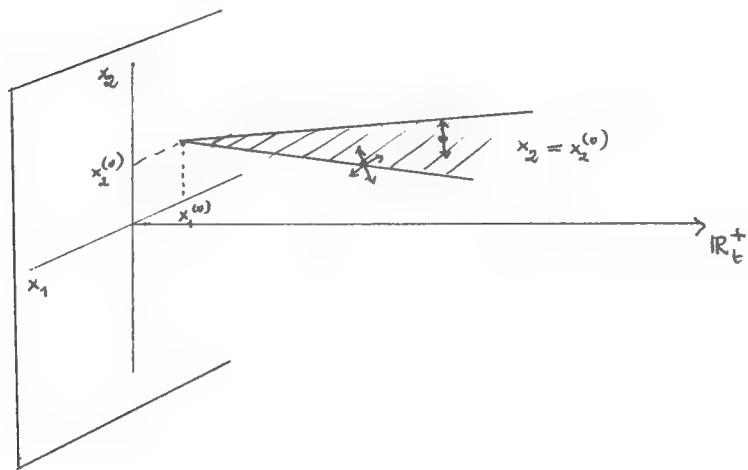
Il cono 3 è il caso di rifrazione originato dai punti in cui la normale al cerchio ha componente $\eta_1 = 0$.

Ecco invece qual'è l'evoluzione di una $\delta(x_1 - x_1^{(0)}, x_2 - x_2^{(0)})$.



$$P = \partial_t^2 - (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)$$

singularità iniziale in $\delta(x_1 - x_1^{(0)}, x_2 - x_2^{(0)})$



$$P = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2, \text{ in } R_t \times R^2.$$

singularità iniziale in $\delta(x_1 - x_1^{(0)}, x_2 - x_2^{(0)})$

Vediamo ora di enunciare il risultato di propagazione.

Giacché Σ' è involutiva, si può applicare il teorema di Frobenius e dedurre che per ogni $\rho \in \Sigma'$ passa una foglia massimale F_ρ che è una sottovarietà immersa di dimensione k e tale che $T_\rho(F_\rho) = T_\rho(\Sigma')^\perp$, $\forall \rho \in F_\rho$. Ora osserviamo che se $F \subset \Sigma'$ è una foglia, c'è un'identificazione canonica tra $T_\rho^*(F)$ e $N_\rho(\Sigma') = T_\rho(T^*X)/T_\rho(\Sigma')$, ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} j_\rho : N_\rho(\Sigma') \longrightarrow T_\rho^*(F) \\ j_\rho(\pi(v)) = v \lrcorner \omega_\rho|_{T_\rho(F)}, \quad v \in T_\rho(T^*X), \end{array} \right.$$

dove $(v \lrcorner \omega_\rho)(v') \stackrel{\text{def}}{=} \omega_\rho(v, v')$; si vede subito che $v \lrcorner \omega_\rho$ ristretta a $T_\rho(F)$ dipende solo da $\pi(v) \in N_\rho(\Sigma')$ e che j_ρ è iniettiva (e dunque biettiva). Poiché già sappiamo che Hess $p(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$, definisce una forma simmetrica su $N_\rho(\Sigma')$, potremo definire la forma quadratica:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_F : T^*F \longrightarrow \mathbb{R} \\ q_F(\rho, \zeta) = \langle \text{Hess } p(\rho) j_\rho^{-1}(\zeta), j_\rho^{-1}(\zeta) \rangle, \end{array} \right.$$

per ogni $(\rho, \xi) \in T^*F$, $F \subset \Sigma'$ essendo una qualunque foglia del fogliettamento di Σ' .

L'ipotesi H_2 ci dice che la forma quadratica q_F è Lorentziana, cioè non degenera e con indice d'inerzia positivo uguale ad 1. Con P come in (2.25) e tenuto conto di (2.26); se $\rho_0 = (o, y_0, \tau = 0, \eta' = 0, \eta''_0)$, la foglia per ρ_0 è data da $F_{\rho_0} = \{(t, y', y''_0, o, o, \eta''_0) | t, y'\}$, sicché $T^*(F_{\rho_0}) = \{(t, y', y''_0; \tau, \eta', \eta''_0) | t, y', \tau, \eta'\}$. Dunque:

$$\begin{aligned}
 (2.29) \quad q_F((t, y', y_0'', 0, 0, \eta_0''), (\tau, \eta')) &= \\
 &= \tau^2 - \sum_1^k a_{ij}(t, y', y_0'', 0, 0, \eta_0'') \eta_i \eta_j
 \end{aligned}$$

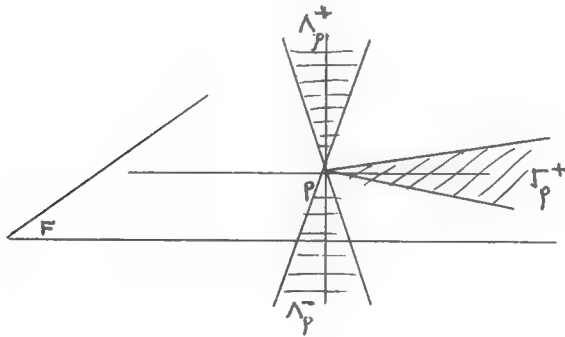
Per $\rho \in \Sigma'$ useremo la notazione Λ_ρ^\pm per indicare le due componenti di

$$\Lambda_\rho^+ \cup \Lambda_\rho^- = \{\zeta \in T_\rho^*(F) \mid q_F(\rho, \zeta) \geq 0\},$$

essendo F la foglia per ρ e definiremo:

$$(2.30) \quad \Gamma_\rho^\pm = \{\pi_F(\exp s H_{q_F}(\rho, \zeta)) \mid s \geq 0, \zeta \in \Lambda_\rho^\pm\},$$

dove π_F è la proiezione sulla foglia F ; Γ_ρ^+ (risp. Γ_ρ^-) si chiama il *cono d'onda nel futuro* (risp. *nel passato*) definito da q_F



Usando le (2.29), $\Gamma_{\rho_0}^+$, $\rho_0 = (t = 0, y_0', y_0'', 0, 0, \eta_0'')$, si trova integrando le equazioni:

$$(2.31) \quad \begin{cases} \dot{t}(s) = 2\tau(s) & , \quad t(0) = 0 \\ \dot{y}'(s) = -\nabla_{\eta'} \left(\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(t, y', y_0'', 0, 0, \eta_0'') \eta_i \eta_j \right) & , \quad y'(0) = y'_0 \\ \dot{\tau}(s) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(t, y', y_0'', 0, 0, \eta_0'') \eta_i \eta_j \right) & , \quad \tau(0) = \tau_0 \\ \dot{\eta}'(s) = \nabla_{y'} \left(\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(t, y', y_0'', 0, 0, \eta_0'') \eta_i \eta_j \right) & , \quad \eta'(0) = \eta'_0 \end{cases}$$

$$\text{con } \tau_0 \geq \sqrt{\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(0, y'_0, y_0''; 0, 0, \eta_0'') \eta_i^{(0)} \eta_j^{(0)}} \quad (\text{analogo per } \Gamma_{\rho_0}^-).$$

Siamo ora in grado di definire le relazioni fondamentali.

$$(2.32) \quad \begin{cases} C^\pm = \{(\rho', \rho'') \in (\Sigma \setminus \Sigma') \times T^*Y \setminus 0 \mid \exists \rho \in \Sigma, i^*(\rho) = \rho'' \notin \tilde{\Sigma} \\ \quad \exists s, \pm s \geq 0, \rho' = \exp(s H_p)(\rho)\}. \\ C = C^+ \cup C^-. \\ C_1^\pm = \{(\rho', \rho'') \in \Sigma' \times \tilde{\Sigma} \mid \rho'' = i^*(\rho), \rho \in \Sigma', \rho' \in F_\rho \text{ e } \rho' \in \Gamma_\rho^\pm\} \\ C_1^+ \cup C_1^- = C_1. \end{cases}$$

Si noti che C^\pm coincidono con le relazioni (2.6) fuori di Σ' , mentre C_1^\pm sono relazioni su $\Sigma' \times \tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma} = i^*(\Sigma' |_\gamma)$. Vale allora il teorema

Teorema 4 (Melrose-Uhlmann [18]). Nell'ipotesi H_2 , con Σ' involu-
tiva regolare, e supposto che $p'|_{\Sigma'} = 0$, se $u \in \mathcal{D}'(X)$ è soluzione del
P.d.v.C. (2.3) si ha:

$$(2.33) \quad \text{WF}(u) \subset (C \cup C_1) \text{ o } (\text{WF}(g_0) \cup \text{WF}(g_1)),$$

dove $\text{WF}(\cdot)$ indica il fronte d'onda C^∞ .

Osservazione. L'ipotesi $p'|_{\Sigma'} = 0$ è necessaria (Teorema 2) e sufficiente (Teorema 3) affinché il P.d.C. (2.3) sia ben posto in C^∞ (si noti che $F(\rho)$ è nilpotente). Melrose e Uhlmann ottengono il Teorema 3 costruendo parametrici microlocali per il P.d.C. È interessante osservare che la dimostrazione in [18] si basa su una variante del metodo dell'ottica geometrica.

Ci si può ora domandare cosa succede se la condizione di Levi $p'|_{\Sigma'} = 0$ non è soddisfatta (e quindi il problema di Cauchy non è ben posto in C^∞).

Ricordiamo a questo proposito che alcuni casi con $p'|_{\Sigma'} \neq 0$ sono stati trattati da R. Lascar [12] e da Mendoza-Uhlmann[4]', [5]' (questi ultimi nel caso $\text{codim } \Sigma' = 2$). In particolare, in [12] sembra che il $\text{WF}(u)$ sia sostanzialmente diverso nei casi $p'|_{\Sigma'} > 0$ e $p'|_{\Sigma'} < 0$, mentre in [5]' viene trattato il caso $\text{Imp}'|_{\Sigma'} \neq 0$. In sostanza i risultati di propagazione in C^∞ quando $p'|_{\Sigma'} \neq 0$ sono diversi da quanto espresso dal Teorema 4.

Quando si passa dal quadro C^∞ al quadro analitico o Gevrey la situazione cambia in modo radicale.

Vale il teorema:

Teorema 5 (Ivrii [9], Trepreau [23], Bronštein [3]'): se P soddisfa $H_1^{(+)}$ allora il P.d.C. (2.3) (anche non omogeneo) è ben posto in $G^\sigma(X)$, $1 \leq \sigma < 2$. Il P.d.C. è univocalmente (in \mathcal{D}') localmente risolubile anche in $G^2(X)$.

(+) Con coefficienti analitici.

Esaminando ora il Problema 2), cominciamo col considerare il caso Gevrey. Qui i risultati più generali sembrano come quelli di Wakabayashi [24]. Per enunciare il risultato fondamentale di [24] premettiamo alcune definizioni. Sia P soddisfacente H_1 e poniamo $\theta = (\tau=1, \eta=0)$. Supponiamo, per semplicità, che P abbia coefficienti analitici in X .

Per ogni $\rho = (t, y, \tau, \eta) \in T^*X \setminus 0$, $\eta \neq 0$, e per ogni $v \in T_\rho(T^*X)$ sia $p_\rho(v)$ la localizzazione di p in ρ , i.e.

$$(2.34) \quad p(\rho + \epsilon v) = \epsilon^\mu (p_\rho(v) + o(1)), \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

con $\mu \leq 2$.

E' noto (Cfr. Hormander [5]) che $p_\rho(\cdot)$ è (omogeneo e) iperbolico in $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ rispetto a $(0, \theta)$ e quindi poniamo:

$$(2.35) \quad \Gamma(p_\rho, (0, \theta)) = \text{componente di } (0, \theta) \text{ in}$$

$$\{v \in T_\rho(T^*X) \mid p_\rho(v) \neq 0\}$$

$$(2.36) \quad \Gamma_\rho^\pm = \{v' \in T_\rho(T^*X) \mid \omega_\rho(v', v) \leq 0, \forall v \in \Gamma(p_\rho, (0, \theta))\}$$

$$(2.37) \quad \Lambda_\rho^\pm = \{\gamma(t) \in T^*X \mid t \rightarrow \gamma(t) \text{ è Lipschitziana con}$$

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) \in \Gamma_{\gamma(t)}^\pm, \text{ q.d. in } t, \gamma(0) = \rho, \pm t \geq 0\};$$

Vale allora il:

Teorema 6 (Wakabayashi [24]). Sia P a coefficienti analitici soddisfacenti H_1 . Se $u \in \mathcal{D}'(X)$ è soluzione del P.d.C. (2.3) si ha:

$$(2.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{WF}_\sigma(u) \subset \{\rho \in T^*X \setminus 0 \mid \exists \rho' \in T^*X \setminus 0, \\ i^*(\rho') \in (\text{WF}_\sigma(g_0) \cap \text{WF}_\sigma(g_1)) \}, \quad \rho \in \Lambda_\rho^+ \cup \Lambda_\rho^- \end{array} \right.$$

Dove $\text{WF}_\sigma(\cdot)$ è il fronte d'onda Gevrey con $1 < \sigma < 2$.

È da notare la generalità del Teorema 6 (in [24] è in realtà enunciato un teorema più generale per caratteristiche di molteplicità $r \geq 2$, e allora $\sigma \in]1, r/r-1[$).

Per fare un confronto con il Teorema 4, osserviamo che se P ha caratteristiche doppie involutive e se $\rho \in \Sigma'$ allora:

$$(2.38) \quad p_\rho(v) = \frac{1}{2} \langle \text{Hess } p(\rho) v, v \rangle, \quad v \in T_\rho(T^*X).$$

Dunque $p_\rho(v) = 0$ se $v \in T_\rho(\Sigma')$ mentre su $N_\rho(\Sigma') = T_\rho(T^*X)/T_\rho(\Sigma')$, p_ρ è una forma quadratica non degenera di indice d'inerzia positivo uguale a 1.

Quando P ha la forma (2.25) si ha, se

$$\rho = (0, y'_0, y''_0, \tau = 0, \eta' = 0, \eta''),$$

$$\Gamma(p_\rho, (0, \theta)) = \{(\delta t, \delta y', \delta y'', \delta \tau, \delta \eta', \delta \eta'') \in T_\rho(T^*X) \mid$$

$$\delta \tau > \sqrt{\sum_{i,j}^k a_{ij}(0, y'_0, y''_0, 0, \eta'_0, \eta''_0) \delta \eta'_i \delta \eta''_j}\}$$

e quindi $v' = (\delta t', (\delta y')', (\delta y'')', \delta \tau', (\delta \eta')', (\delta \eta'')') \in \Gamma_\rho$ si ha:

$$\omega_\rho(v', v) = \delta \tau' \delta t + \langle (\delta \eta')', \delta y' \rangle + \langle (\delta \eta'')', \delta y'' \rangle - \delta \tau \delta t' - \langle \delta \eta', (\delta y')' \rangle$$

$$- \langle \delta \eta'', (\delta y'')' \rangle \geq 0, \quad \text{per } v \in \Gamma(p_\rho(0, \theta))$$

E' allora facile vedere che $\Gamma_\rho = \{(\overline{\delta t}, \overline{\delta y}', \overline{\delta y}'', \overline{\delta \tau}, \overline{\delta \eta}', \overline{\delta \eta}'')\}$

$\overline{\delta y}'' = 0, \overline{\delta \tau} = 0, \overline{\delta \eta}' = 0, \overline{\delta \eta}'' = 0$ e $(\overline{\delta t}, \overline{\delta y}') \in T(p_\rho, (0, \theta))^0$

Se ne deduce che $\Lambda_\rho^\pm = \{(\rho', \rho'') \in C_1^\pm \mid \rho'' = \rho\}$ e quindi il Teorema 4 vale anche per il $WF_\sigma(\cdot)$, $1 < \sigma < 2$, senza la condizione di Levi.

Problema. Cosa succede se $\sigma \geq 2$? Qual'è l'indice critico Gevrey che separa i risultati in C^∞ da quelli per $\sigma < 2$?

Quanto al caso analitico osserviamo che Laubin [14] ha provato un risultato dello stesso tipo del Teorema 4 per il $WF_{(1)}(\cdot)$, senza condizione di Levi su P . La dimostrazione di Laubin utilizza il noto teorema di Koshiwara-Kawai [6] sugli operatori microiperbolici (Cfr. anche Sjostrand [7]' per teoremi generali di propagazione nel caso analitico).

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. CHAZARAIN: Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Institut Fourier, 24 (1974), 173-202.
- [2] J.J. DUISTERMAAT: Fourier integral operators. Courant Inst. Lect. Notes, N.Y., 1973.
- [3] L. HÖRMANDER: Fourier integral operators I, Acta Math., 127 (1971), 79-183.
- [4] ————— : The Cauchy problem for differential equations with double characteristics, J. d'Anal. Math., 32 (1977), 118-196.
- [5] ————— : The analysis of linear partial differential operators, Vol. 1, Springer (Berlin), 1983.
- [6] M. KASHIWARA, R. KAWAI: Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 359-404.
- [7] V. Ya IVRII: Wave front of solution of some hyperbolic equations and conical refraction, Soviet Math. Dokl., 17 (1976), 265-268.
- [8] —————: Wave front of some hyperbolic pseudo-differential operators, Soviet Math. Dokl., t. 229 (2), 1976..
- [9] —————: Condition for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Sib. Math. Zh., 17 (1976), 547-563.

- [10] V. Ya IVRII: Sufficient conditions for regular and completely regular hyperbolicity, Tans. Moscow Math.Soc. 1 (1978), 1-65.
- [11] V.Ya IVRII, V.M. PETKOV: Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations, Russian Math. Surveys, 5 (1974), 1-70.
- [12] R. LASCAR: Propagation des singularités des solutions..., Springer Lecture Notes in Math., 856 (1981).
- [13] B. LASCAR, R. LASCAR: Propagation des singularités....., J. D'Anal. Math., 41 (1982), 1-38.
- [14] P. LAUBIN: Analyse microlocale des singularités analytiques, Bull. Soc. Belg., 2 (1983), 103-212.
- [15] D. LUDWIG: Conical refraction in crystal optics and hydromagnetis, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 113-124.
- [16] R.B. MELROSE: The Cauchy problem for effectively hyperbolic operators, Hokkaido Math. J., 12 (1983), 371-391.
- [17] R.B. MELROSE, G.A. UHLMANN: Lagrangian intersection and the Cauchy problem, Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979), 483-519.
- [18] —————: Microlocal structure of involutive conical refraction, Duke Math. J., 46 (1979), 571-582.

- [19] J.C. NOSMAS: Parametrix du problème de Cauchy pour une classe de systèmes hyperboliques..., Comm. P.D.E., 5 (1986), 1-22.
- [20] O.A. OLEINIK: On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 569-586.
- [21] K. TANIGUCHI: Fourier integral operators in Gevrey class on \mathbb{R}^n ..., Publ. R.I.M.S., Kyoto, 20 (1984), 491-542.
- [22] M. TAYLOR: Pseudodifferential operators, Princeton Univ. Press, 1981.
- [23] J.M. TREPPEAU: Le problème de Cauchy hyperbolique dans les classes d'ultrafonctions et d'ultradistributions., Comm. P.D.E., 4 (1979), 339-387.
- [24] S. WAKABAYASHI: Singularities of solutions of the hyperbolic Cauchy problem in Gevrey classes, Proc. Japan Acad. Sc., 59 (1983), 182-185.

Aggiunte:

- [1]' S. ALINHAC: Parametrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité variable. Astérisque 34-37 (1976), 3-26.
- [2]' ———: Solution explicite du problème de Cauchy pour des opérateurs effectivement hyperboliques, Duke Math. J. 45 (1978), 225-258.

- [3]' M.D. BRONSTEIN: The Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity, Trans. Moscow Math. Soc., 1 (1982), 87-103.
- [4]' G.A. MENDOZA, G.A. UHLMANN: A necessary condition for local solvability for a class of operators with double characteristics, J. of Funct. Anal., 52 (1983), 252-256.
- [5]' _____: A sufficient condition for local solvability for a class of operators with double characteristics, Am. J. of Math., 106 (1984), 187-217.
- [6]' T. MIWA: Propagation of microanalyticity for solutions of pseudodifferential equations, I. Publ. R.I.M.S., Hyoto, 10 (1975), 521-533.
- [7]' J. SJÖSTRAND: Singularités analytiques microlocales, Prepubl. Univ. Paris-Sud, Orsay, 1982.